תורת הקבוצות, תרגיל 1

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות: לכל הקבוצות A, B, C קיים:
   א. $A \cup B = A \cap C$ אםם $A \subseteq B \subseteq C$.
   ב. אם $A \setminus B = A \setminus C$ אז $B = C$.
   ג. אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$.
   ד. $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus (A \setminus B)$.

2. לקבוצה $\{B \mid B \subseteq A\}$, שהיא קבוצת תתי-הקבוצות של הקבוצה A אנו קוראים **קבוצת החזקה** של A ונסמן אותה ב- $\mathbf{P}(A)$. הוכח כי לכל הקבוצות A, B קיים:
   א. $\mathbf{P}(A) \subseteq \mathbf{P}(B)$ אםם $A \subseteq B$.
   ב. $\mathbf{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathbf{P}(A) \setminus \mathbf{P}((B)$. מצא תנאי הכרחי ומספיק לשיוויון.
   ג. תהי $\{x\} \in A$; האם $\{x\} \in \mathbf{P}(A)$?

3. נקרא לקבוצה A **טרנזיטיבית** אם כל איבר של A הוא תת-קבוצה של A,
כלומר, לכל x קיים $x \in A \Rightarrow x \subseteq A$.
   א. תן דוגמא לקבוצה טרנזיטיבית ולקבוצה שאינה טרנזיטיבית. (רמז: השתמש ב-$\{\emptyset\}$).
   ב. הוכח שקבוצה A היא טרנזיטיבית אםם $A \subseteq \mathbf{P}(A)$.
   ג. הוכח שאם A טרנזיטיבית אז $\mathbf{P}(A)$ טרנזיטיבית.
   ד. הוכח שאם A טרנזיטיבית אז $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית.
   ה. הוכח שלכל מספר טבעי n קיימת קבוצה טרנזיטיבית בת n איברים.
   ו. מצא דוגמא לקבוצה טרנזיטיבית A כך שלא כל קבוצה שהיא איבר של A היא קבוצה טרנזיטיבית.

4. אילו מן ההגדרות הבאות מקיימות את "תכונת הזוג הסדור", כלומר אם $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ אז $a = c$ ו- $b = d$.
   א. $\langle x, y\rangle' = \{x, \{\{y\}\}\}$.
   ב. $\langle x, y\rangle' = \{x.\{x, \{y\}\}\}$.

5. בנה מחלקה נוספת (על המחלקות שהוצגו בשעור ובתרגיל) עבורה מתקבלת אנטינומיה הדומה לאנטינומית Russell.

תאריך ההגשה: 27.10.2004